

Problème 102 – Les chaînes de solidarité

Niveau : Première (Spécialité Maths)

Chapitre : Suites numériques, Algorithmique

Inédit, publié le 18/03/2020



Dans des périodes troublées comme celle qui impacte nos existences en ce début d'année 2020, notre premier réflexe est souvent celui de nous refermer et de penser essentiellement à nous-mêmes. Or, dans ces moments, si il y a un virus que nous devrions accepter d'attraper coûte que coûte, c'est bien celui de la solidarité. Nous sommes, que nous le souhaitons ou non, liés les uns et les autres, et nous avons besoin que chacun pense à l'autre: c'est pourquoi il est important de ne pas couper les chaînes de solidarité, et ce quelque soient les circonstances. C'est à ces chaînes, petites ou grandes, et aux connexions que nous avons les uns avec les autres, qu'est dédié ce problème.

On suppose qu'au 1^{er} jour, la lycéenne Audrey, même confinée, lance une forme toute simple de chaîne de solidarité : elle prend, par téléphone, des nouvelles de 3 personnes proches pour savoir si elles vont bien. Le 2^{ème} jour, les 3 personnes prennent elles-mêmes des nouvelles de 3 personnes, en sachant que dans les 9 coups de fils passés, 2 le sont à des personnes déjà appelées auparavant. Ensuite, on considère que lors du n^{ème} jour, chaque personne qui a reçu un coup de fil la veille pour la première fois à travers cette chaîne appelle 3 personnes, mais on considère que parmi tous les coups de fil passés, n coups de fil le sont à des personnes ayant déjà reçu un appel auparavant. Les personnes ayant appelé 3 personnes dans cette chaîne ne le font qu'une seule fois.

On appelle (u_n) la suite qui à n associe le nombre de personnes qui reçoivent un coup de fil pour la première fois dans cette chaîne le n^{ème} jour. Au 1^{er} jour, on a donc $u_1 = 3$.

On supposera que toutes les personnes appelées sont Françaises.

1) Calculer u_2 , u_3 , u_4 .

2) Expliquer pourquoi on peut écrire : $u_n = 3u_{n-1} - n$.

3) On pose (v_n) la suite telle que : $v_n = u_n - \frac{n}{2} - \frac{3}{4}$

a) Justifier que (v_n) est une suite géométrique de raison $q=3$.

b) Calculer son premier terme v_1 .

c) Exprimer v_n en fonction de n .

d) En déduire une expression de u_n en fonction de n .

4) a) Parmi les 3 programmes Python proposés ci-dessous, quel est celui qui donne le nombre de jours au bout desquels toute personne Française (on dira qu'il y en a 67 millions – sans besoin d'inclure Audrey !) aura reçu un appel à travers cette chaîne de solidarité lancée par Audrey ?

Programme A	Programme B	Programme C
<pre>u=3 s=3 n=1 while s<67000000: s=u+s n=n+1 u=3*u-n print(n)</pre>	<pre>u=3 s=3 n=1 while u<67000000: n=n+1 u=3*u-n s=u+s print(n)</pre>	<pre>u=3 s=3 n=1 while s<67000000: n=n+1 u=3*u-n s=u+s print(n)</pre>

b) Proposer une modification de l'algorithme choisi à la question 4) a) pour qu'il permette d'obtenir exactement le même résultat, mais sans utiliser de variable u .